MP*2 Composition 3

I Nombres et polynômes de Bernoulli, formule d'Euler-Mac Laurin

Les notations introduites dans la partie I sont utilisées dans la partie II.

I-1) Montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes B_n dans $\mathbf{R}[X]$ telle que
i) $B_o = 1$;
ii) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$;
iii) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.
Calculer B_i pour $i = 0, \ldots, 5$.

2-a) Vérifier que :
pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\deg(B_n) = n$; pour tout $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, $n \geq k \Rightarrow B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$; $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$, $B_n(0) = B_n(1)$.

I - 2 - b) Comparer, selon la parité de n, $B_n(X)$ et $B_n(1-X)$. On pose : $b_n = B_n(0)$; prouver que $b_n = 0$ pour tout n impair ≥ 3.

I-3) Soit f une fonction appartenant à $C^{2n+2}([0,1], \mathbf{R})$; prouver l'égalité

$$f(1)-f(0) = \frac{1}{2}[f'(0)+f'(1)] - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{2j}}{(2j)!}(f^{(2j)}(1)-f^{(2j)}(0)) - \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 B_{2n+1}(x)f^{(2n+2)}(x)dx.$$

I - 4) Soient a un nombre réel, et g une application de classe C^∞ de $[a, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$. On se donne deux entiers p et q tels que $q > p \geq a$, S_m désigne $\sum_{a \leq k \leq m} g(k)$. Montrer que, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, on a

$$S_q - S_p = \frac{1}{2}(g(q) - g(p)) + \int_p^q g(t)dt + \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)!}[g^{(2j-1)}(q) - g^{(2j-1)}(p)] + R_{p,q,r}$$

où $R_{p,q,r} = \frac{1}{(2r+1)!}\sum_{n=p}^{q-1} \int_n^{n+1} B_{2r+1}(x-n)g^{(2r+1)}(x)dx$.

I - 5) Les notations de 4) sont conservées. On suppose de plus que :
i) $\int_a^{+\infty} g$ converge, $\sum_{n \geq n_0} g(n)$ converge de somme S, g tend vers 0 en $+\infty$;
ii) $\int_a^{+\infty} |g^{(2r+1)}(t)|dt$ converge.
Prouver que $R_{p,q,r}$ possède une limite $R_{p,r}$ lorsque q tend $+\infty$ et que

$$S - S_p = -\frac{1}{2}g(p) + \int_p^{+\infty} g(t)dt - \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)!}g^{(2j-1)}(p) + R_{p,r}$$

On pourra d'abord démontrer les résultats suivants :
— Si f est une fonction C^1 de $[a, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ telle que f et f' aient une limite en $+\infty$, alors la limite de f' est nulle ;

— Si f est une fonction de classe C^m de $[a, +\infty[$ dans R telle que f et $f^{(m)}$ aient une limite en $+\infty$, les dérivées intermédiaires $f', \dots, f^{(m-1)}$ en ont une aussi, et cette limite est nulle.

II Applications des formules établies en I

Les sous-parties A, B, C et D sont pour l'essentiel indépendantes.

II-A-1) On pose : $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. S_p désigne la p-ième somme partielle de cette série. Montrer que $S - S_p < \frac{1}{2p^2}$. Combien faut-il *a priori* sommer de termes de la série pour obtenir sa somme à une précision $< 10^{-4}$?

II-A-2) On pose, ici et dans la suite, $M_n = \|B_n\|_\infty$, la norme sup. étant prise sur $[0, 1]$. Prouver , avec les notations de I-5), que :

$$|R_{p,r}| \leq \frac{M_{2r+1}}{(2r+1)!} \int_p^{+\infty} |g^{(2r+1)}(t)| dt.$$

Avec $r = 1$ et $g(x) = \frac{1}{x^3}$, calculer S à 10^{-4} près.

II-B-1) Prouver que la série $\sum_{n \geq 2} [\frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})]$ converge ; soit $\gamma - 1$ sa somme.

II-B-2) Soit p un entier ≥ 1 ; on pose $S_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $r \geq 1$

$$\gamma - S_p = -\frac{1}{2p} - \ln(p) + \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)p^{2j}} - \sum_{n=p}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{B_{2r+1}(x-n)}{x^{2r+2}} dx.$$

En déduire , avec $r = 2$, la valeur de γ à 10^{-4} près.

II-C-1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que, pour tout $m \geq 0$:

$$\int_0^1 B_{2m+2}(t) \cos(2\pi nt) dt = (-1)^m \frac{(2m+2)!}{(2\pi n)^{(2m+2)}}$$

II-C-2) On garde les notations de II-B-1). Donner une expression intégrale de la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2m+2}}$

II-C-3) Montrer que $\frac{B_{2m+2}(x) - b_{2m+2}}{\sin(\pi x)}$ possède un prolongement continu sur $[0, 1]$; en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2m+2}}$ et le fait que, pour tout $m \geq 1$, $\zeta(2m)\pi^{-2m}$ est un nombre rationnel.

II-D) En appliquant convenablement les résultats de la partie I à la fonction $x \mapsto \ln(x)$, démontrer que, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\ln(n!) = (n + \frac{1}{2}) \ln(n) - n + \ln(\sqrt{2\pi}) + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_{2k}}{(2k-1)(2k)} \frac{1}{n^{2k-1}} + O(n^{-2r}).$$

1°) Supposons en effet déterminés $B_0, \ldots, B_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Alors : pour x dans $[0,1]$: $B_n(x) = \int_0^x n B_{n-1}(t)\,dt + C$, et : $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow C = -n\left(\int_0^1\left(\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt\right)dx\right)$, d'où l'existence et l'unicité de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On a donc : $B_n(x) = n\left[\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt - \int_0^1\left(\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt\right)dx\right]$, d'où :

$B_1(X) = X - \int_0^1 t\,dt = X - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = 2\left[\frac{1}{2}(X-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2 dt\right] = X^2 - X + \frac{1}{4}$

$- \frac{1}{3}\left[(t-\frac{1}{2})^3\right]_0^1 = X^2 - X + \frac{1}{6}$, $B_3(X) = X^3 - \frac{3X^2}{2} + \frac{X}{2}$. $B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$

$B_5(X) = X^5 - \frac{5X^4}{2} + \frac{5X^3}{3} - \frac{X}{6}$

2°) a). Par récurrence sur n, B'_n est de degré $n-1$, donc B_n de degré n

" " " descendante sur $k \geq 1$, le résultat étant par hypothèse vrai pour $k = 1$: si $B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$, et : $k < n$, il vient : $B_n^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!} B'_{n-k} = \frac{n! \times (n-k)}{(n-k)!} B_{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} \cdot B_{n-k-1}$

... enfin, $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t)\,dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt = 0$ dès que : $n - 1 \geq 1$, soit : $n \geq 2$.

b) Prouvons, par récurrence sur n : $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$, ce qui est vrai pour $n = 0, 1$ .. ; pour $n \geq 2$:

$(B_n(1-X))' = -n \cdot B'_{n-1}(1-X) = (-1)^n n B'_{n-1}(X) = (-1)^n (B_n(X))'$, donc :

$B_n(1-X) = C + (-1)^n B_n(X)$, $C \in \mathbb{R}$. Intégrons ceci sur $[0,1]$, il vient :

$0 = \int_0^1 B_n(1-x)\,dx = (-1)^n \underbrace{\int_0^1 B_n(x)\,dx}_{0} + C$, d'où : $C = 0$

c) résulte immédiatement de ce qui précède : $b_n = B_n(0) = B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$ avec b) donc : $b_n = 0$ pour n impair $\square$

3°) Intégrons : $\int_0^1 B_{2n+1}(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx$ par parties sur $[0,1]$, en dérivant B_{2n+1}, comme : $\deg B_{2n+1} = 2n+1$, on a : $B_{2n+1}^{(2n+2)} = 0$, et donc :

$\int_0^1 B_{2n+1}(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx = \left[\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} \cdot f^{(2n+2-k)}(x)\, B_{2n+1}^{(k-1)}(x)\right]_0^1 = \left[\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot f^{(2n+1-k)}(x) \cdot B_{2n+1}^{(k)}(x)\right]_0^1$

$= \left[\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k f^{(2n+1-k)}(x) \times \frac{(2n+1)!}{(2n+1-k)!} B_{2n+1-k}(x)\right]_0^1$ (avec 2°) a)) et donc, d'après

2°) c) : $\int_0^1 f^{(2n+2)}(x) \cdot B_{2n+1}(x)\,dx = \left[f(x)(2n+1)!\,B_1(x)\right]_0^1 + \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{2\ell+1}\left[f^{(2n+1-2\ell+1)\,2(n-\ell)}(1) - f(0)\right] \times$

$\times\, b_{2(n-\ell)} \times \frac{(2n+1)!}{2n(\ell-k)}$, donc, en changeant $n-\ell$ en j :

$\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 f^{(2n+2)}(x) B_{2n+1}(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \sum_{j=0}^{n} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\right)$, d'où

l'égalité souhaitée en isolant le terme correspondant à $j = 0$: $f(1) - f(0)$ $\square$

2) Posons $f(t) = \int_a g(t)dt$, et appliquons la formule précédente,

$$\int_n^{n+1} g(t)dt = \frac{1}{2}\left[f(n+1) + f(n)\right] - \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(g^{(2j-1)}(n+1) - g^{(2j-1)}(n)\right) - \frac{1}{(2r+1)!}\int_n^{n+1} B_{2r+1}(t-n)g^{(2r+1)}(t)dt$$

En sommant pour $n = p, \dots, q-1$, il vient :

$$\int_p^q g(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[g(p) + 2\sum_{k=p+1}^{q-1} g(k) + g(q)\right] - \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left[g^{(2j-1)}(q) - g^{(2j-1)}(p)\right] - \frac{1}{(2r+1)!}\sum_{n=p}^{q-1}\int_n^{n+1} B_{2r+1}(x-n)g^{(2r+1)}(x)dx$$

Comme : $S_q - S_p = \sum_{n=p+1}^{q} g(n)$, nous trouvons, en remplaçant

$\frac{1}{2}\left[g(p)+g(q)+2\sum_{k=p+1}^{q-1} g(k)\right]$ par $\frac{1}{2}\left[g(p) - g(q)\right] + S_q - S_p$:

$$S_q - S_p = \frac{1}{2}\left[g(q) - g(p)\right] + \int_p^q g(t)dt + \sum_{j=1}^{r}\frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(g^{(2j-1)}(q) - g^{(2j-1)}(p)\right) + R_{p,q,r} \quad \square$$

3) * On a, pour tout $n \geq p$: $\left|\int_n^{n+1} B_{2r+1}(x-n)\, g^{(2r+1)}(t)dt\right| \leq \left(\int_n^{n+1} |g^{(2r+1)}(t)|dt\right) \times M_{2r+1}$

et $\left(\int_a^{+\infty} |g^{(2r+1)}(t)|dt \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\text{la série de tg } \int_n^{n+1} |g^{(2r+1)}(t)|dt \text{ converge}\right)$

Donc la série de tg : $\left|\int_n^{n+1} B_{2r+1}(x-n) g^{(2r+1)}(t)\right| dt$ converge, ce qui assure

l'existence de : $\lim_{q \to +\infty} R_{p,q,r} = R_{p,r}$, on note de plus que, par

sommation des inégalités soulignées : $\underline{|R_{p,r}| \leq M_{2r+1}\int_a^{+\infty} |g^{(2r+1)}(t)|dt}$.

** Prouvons maintenant : $\exists \lim_{t \to +\infty} g^{(\ell)}(t) = 0$, pour $\ell = 0, \dots, 2r$.

1) $\underline{\exists \lim_{t\to+\infty} g^{(2r)}(t) = \alpha_{2r}}$. En effet, l'intégrale : $g^{(2r)}(x) - g^{(2r)}(a) = \int_a^x g^{(2r+1)}(t)dt$

converge absolument en $+\infty$ par hypothèse.

2) $\underline{\exists \lim_{t\to+\infty} g^{(\ell)}(t) = \alpha_\ell}$ pour $\ell = 1, \dots, 2r-1$. Soient $y_1, \dots, y_{2r-1}$ $2r-1$

réels distincts, >0, et fixés. Écrivons Taylor-Lagrange pour $g(x+y_k)$,

$k = 1, \dots, 2r-1$, avec un reste d'ordre $2r$, il vient :

$$\begin{cases} g(x+y_1) - \dfrac{y_1^{2r}}{(2r)!} g^{(2r-1)}(x+\theta_{1,x}y_1) = y_1 g'(x) + \cdots + \dfrac{y_1^{2r-1}}{(2r-1)!} g^{(2r-1)}(x), \quad 0<\theta_1<1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ g(x+y_{2r-1}) - \dfrac{y_{2r-1}^{2r}}{(2r)!} g^{(2r-1)}(x+\theta_{2r-1,x}y_{2r-1}) = y_{2r-1} g'(x) + \cdots + \dfrac{y_{2r-1}^{2r-1}}{(2r-1)!} g(x), \quad 0<\theta_{2r-1}<1 \end{cases}$$

Le membre de droite est un système linéaire en $g'(x), \dots, g^{(2r-1)}(x)$ dont

le déterminant est le Van Der Monde[(0)] de $y_1, \dots, y_{2r-1}$. soit

$\underline{\Delta = W(y_1, \dots, y_{2r-1}) \neq 0}$, puisque $y_1, \dots, y_{2r-1}$ sont distincts

D'après les formules de Cramer, $g'(x), \dots, g^{(2r-1)}(x)$ sont C.L à coefficients

$\underline{\text{fixés}}$ de $f_i(x) = g(x) - \dfrac{y_i^{2r}}{(2r)!} g^{(2r)}(x + \theta_{i,x} y_i)$, $i = 1, \dots, 2r-1$.

Comme chacune des f_i admet une limite en $+\infty$, itou les $g^{(\ell)}$,

d'où le résultat!

3) $\underline{\alpha_\ell = 0 \text{ pour } \ell = 0, \dots, 2r}$ Pour $\ell = 1$, on choisit, n étant donné

$\left|\begin{matrix} 1 & \cdots & y_1^{2r-2} \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}\right| \neq 0$

(0) Déterminant modifié : $\Delta = y_1 \cdots y_{2r-1}$

… que : $g(n+1) - g(n) = g'(c_n)$ (AFP)

d'où : $\alpha_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} g'(c_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} [g(n+1) - g(n)] = 0$. De même, en appliquant les AFP à $g'(n+1) - g'(n)$: $\alpha_2 = 0$, conclusion par récurrence.

<u>Enfin</u> un passage licite à la limite dans l'égalité de 4°) fournit ; compte tenu de $**$

$$S - S_p = -\frac{1}{2} g(p) + \int_p^{+\infty} g(t)\,dt - \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)!} g^{(2j-1)}(p) + R_{p,r} \qquad \square$$

II

A) 1°) On a : $S - S_p = \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < \int_p^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2p^2}$.

Avec l'inégalité précédente, il faut que : $\frac{1}{2p^2} < 10^{-4}$, soit $p > \frac{10^{2}}{\sqrt{2}}$, et donc : $p > 50\sqrt{2} \doteq 70,7$, soit : $\underline{p \geq 71}$

2°) La première inégalité a été prouvée en I - 5°) De là, avec :

$S'_p = \sum\limits_{n=1}^{p} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2p^3} + \int_p^{+\infty} \frac{dt}{t^3} + \frac{b_2}{2!} \frac{3}{p^4}$, on a $|S - S'_p| \leq \frac{M_1}{3!} \int_p^{+\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{t^6}\,dt$

Or : $M_1 = \max\limits_{x \in [0,1]} |B_3(x)|$ Or : $B'_3(x) = 3\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$, or :

$x^2 - x + \frac{1}{6} = x(x-1) + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \leq B_2(x) \leq \frac{1}{6}$, $x \in [0,1]$, donc,

en intégrant et en tenant compte de : $B_3(0) = 0$: $-\frac{x}{12} \leq B_3(x) \leq \frac{x}{6}$, $\underline{M_1 \leq \frac{1}{6}}$

Par suite : $|S - S'_p| \leq \frac{1}{3p^5}$, $\underline{p = 6 \text{ convient}}$, et alors :

$S'_6 = \sum\limits_{n=1}^{6} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2 \cdot 6^3} + \frac{1}{2 \cdot 6^2} + \frac{1}{4 \cdot 6^4} = 1,2020\ldots$, donc $\boxed{S = 1,2020 + \varepsilon,\ |\varepsilon| < 10^{-4}}$

3°) a) On a : $\frac{1}{n} + \mathrm{Log}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où la convergence (absolue) de la série b) Avec : $g(x) = \frac{1}{x}$, et I - 5°), il vient : $S_q - S_p = \ldots$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) + \mathrm{Log}\, q - \mathrm{Log}\, p + \sum\limits_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(-\frac{(2j-1)!}{q^{2j}} + \frac{(2j-1)!}{p^{2j}}\right) + R_{p,q,r}$, on note ensuite que : $S_q - \mathrm{Log}\, q = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q} - \mathrm{Log}\, q = 1 + \left(\frac{1}{2} + \mathrm{Log}\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{q} + \mathrm{Log}\frac{q-1}{q}\right) \to \gamma$

donc, en faisant tendre q vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus :

$$\gamma - S_p = -\frac{1}{2p} - \mathrm{Log}\, p + \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)!} \frac{(2j-1)!}{p^{2j}} + R_{p,r}, \qquad \square$$

Si : $S'_p = -\frac{1}{2p} - \mathrm{Log}\, p + \sum\limits_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{2j} \times \frac{1}{p^{2j}} + S_p$, on a : $|\gamma - S'_p| \leq M_r \int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^{2r+2}} = \frac{M_r}{(2r+1)p^{2r+1}}$

Avec : $r = 2$, il faut évaluer : $M_2 = \sup\limits_{x \in (0,1)} |B_5(x)|$, mais :

$B'_5(x) = 5B_4(x) = 5\left[(x(1-x))^2 - \frac{1}{30}\right]$, avec : $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ d'où :

$-\frac{5}{30} \leq B'_5(x) \leq 5\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{30}\right) \underset{B_5(0)=0}{\Rightarrow} -\frac{x}{6} \leq B_5(x) \leq \frac{7}{48}x$, donc : $\underline{M_2 \leq \frac{1}{6}}$

Par suite : $|R_{p,r}| \leq \underbrace{\frac{1}{6(2r+1)p^{2r+1}}}_{\frac{1}{30p^5}} \leq 10^{-4}$ dès que : $\underline{p \geq 4}$

Or : $S'_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{192} - \frac{1}{30 \cdot 1024} - \mathrm{Log}\, 4 = 0,57721$ à 10^{-5} près

à 10^{-4} près, donc : $\boxed{\gamma = 0,5772 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$

$$\int_0^1 \underbrace{B_{2m+2}(t)}_{u}\, \underbrace{f^{(2m+3)}(t)\,dt}_{v'} = \left[\frac{1}{(2m+2)!} B_{2m+2}(t)\, f^{(2m+2)}(t)\right]_0^1 - \frac{2m+2}{(2m+2)!}\int_0^1 \underbrace{B_{2m+1}(t)}_{u}\, \underbrace{f(t)\,dt}_{v'}$$

$$= -\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{2m+1}(t)\, f^{(2m+2)}(t)\,dt = -\left(\frac{1}{2}\left[f'(0)+f'(1)\right] - \sum_{j=0}^{m} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\right)\right)$$

Appliquons ceci avec : $f(t) = \sin 2\pi n t$, $f^{(2m+3)}(t) = (-1)^{m+1}(2\pi n)^{2m+3}\cos(2\pi n t)$

$f^{(2m+2)}(0) = f^{(2m+2)}(1) = 0$, et : $f'(0) = f'(1) = 2\pi n$ il vient, compte-tenu de la 1-périodicité de f et de ses dérivées :

$$\frac{(-1)^m (2\pi n)^{2m+3}}{(2m+2)!}\int_0^1 B_{2m+2}(t)\cos(2\pi n t)\,dt = 2\pi n$$, d'où le résultat.

b) On a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2m+2}} = \frac{(-1)^m(2\pi)^{2m+2}}{(2m+2)!}\int_0^1 B_{2m+2}(t)\left[\cos 2\pi t + \dots + \cos 2\pi N t\right]dt$

avec le a).

c) Posons : $g(x) = \dfrac{B_{2m+2}(x) - b_{2m+2}}{\sin \pi x}$, le polynôme : $Q(x) = B_{2m+2}(x) - b_{2m+2}$ s'annule pour $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$, donc s'écrit : $x(x-1)R(x)$

donc : $g(x) = \dfrac{x(x-1)R(x)}{\sin \pi x}$..

$\varphi(x) = \dfrac{x}{\sin \pi x}$ "est" de classe C^1 en 0 : en effet, cette fonction est C^0 si on la prolonge en posant : $\varphi(0) = \frac{1}{\pi}$, puis, pour $x \in]0, \frac{1}{2}[$:

$\varphi'(x) = \dfrac{\sin \pi x - (x\pi)\cos \pi x}{\sin^2 \pi x} = \dfrac{o(x^3)}{\sin^2 \pi x}$, donc : $\exists \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \varphi'(x) = 0$, et

le théorème de prolongement dérivable s'applique.

De même, $\dfrac{x-1}{\sin(\pi x)}$ admet un prolongement C^1 en 1. Donc :

g admet un prolongement C^1 en 1

* Ensuite, $\displaystyle\int_0^1 B_{2m+2}(t)dt\left[\cos 2\pi t + \dots + \cos 2\pi N t\right]dt =$

$\displaystyle\int_0^1 \left(B_{2m+2}(t) - b_{2m+2}\right)\left(\frac{\cos(\pi N t)\sin \pi(N+1)t}{\sin \pi t} - 1\right) = b_{2m+2} + \underbrace{\int_0^1 g(t)\cos(\pi N t)\sin \pi(N+1)t}_{I_N}$

car : $\displaystyle\int_0^1 B_{2m+2}(t)dt = 0$. prouvons : $\lim\limits_{+\infty} I_N = -\frac{1}{2} b_{2m+2}$:

$\cos \pi N t \cdot \sin \pi(N+1)t = \frac{1}{2}\left[\sin(2N+1)\pi t + \sin \pi t\right]$, d'où il résulte :

$\displaystyle I_N = \frac{1}{2}\int_0^1 g(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\sin(2N+1)\pi t}_{u'} \cdot \underbrace{g(t)}_{v}dt = -\frac{1}{2}b_{2m+2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2N+1}(g(0) - g(1))\right.$

$\displaystyle\left. + \frac{1}{2N+1}\int_0^1 \cos(2N+1)t\, g'(t)dt\right]$, et le terme entre crochets tend vers 0.

Par suite, $\displaystyle\exists \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 B_{2m+2}(t)\left[\cos 2\pi t + \dots + \cos 2\pi n t\right]dt = \frac{1}{2} b_{2m+2}$

avec b) : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2m+2}} = \frac{(-1)^m (2\pi)^{2m+2} \cdot b_{2m+2}}{2 \cdot (2m+2)!}$

"vérification" : si $m = 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4\pi^2 \times \frac{1}{6}}{4} = \frac{\pi^2}{6}$